11.2.9 Funkce II

Předpoklady:

Př. 1: Pro $y \in R \setminus \{3\}$ uprav na co nejjednodušší tvar (výsledky výraz nesmí obsahovat závorky): $\dfrac{\dfrac{y+9}{y-3}+1}{2} \cdot \left(y^2-6y+9\right) =$. V záznamovém archu uveď celý postup řešení.

max. 2 body

$$\frac{\frac{y+9}{y-3}+1}{2} \cdot \left(y^2-6y+9\right) = \frac{\frac{y+9}{y-3}+\frac{y-3}{y-3}}{2} \cdot \left(y-3\right)^2 = \frac{\frac{2y+6}{y-3}}{2} \cdot \left(y-3\right)^2 = \frac{2\left(y+3\right)}{2\left(y-3\right)} \cdot \left(y-3\right)^2 =$$

$$= \left(y+3\right)\left(y-3\right) = y^2-9$$

Př. 2: Cena brambor se od začátku ledna do začátku července zvýšila o 25 %. O kolik procent se bude muset ve zbývající části roku snížit, aby byla na konci roku stejná jako na jeho začátku? **1 bod**

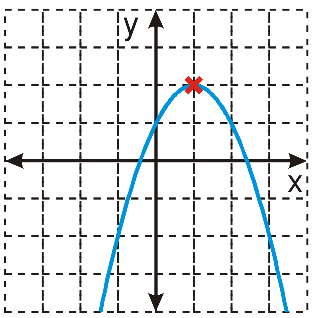
Lednová cena: p
Červencová cena: $c = p + 0,25p = 1,25p$
Cena na konci roku: $k = x \cdot c$
Cena na konci roku bude stejná jako cena na počátku roku: $k = x \cdot c = p$

Dosadíme: $c = 1,25p$: $x \cdot c = x \cdot 1,25p = p \Rightarrow x = \dfrac{1}{1,25} = 0,8$.

Cena na konci roku musí představovat 80 % ceny na začátku července $\Rightarrow$ cena brambor se ve zbytku roku musí snížit o 20 %.

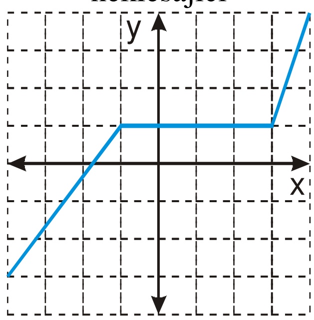
Př. 3: Dokumentuj každou z následujících vlastností funkce vlastním obrázkem: má maximum, neklesající, periodická, prostá, rostoucí, sudá, zdola omezená bez minima, lichá, s $D(f) = \left(-1; 2\right\rangle$ a s $H(f) = \left\langle -3; 3\right)$. Obrázky vymýšlej tak, aby dokumentovaly pouze požadovanou vlastnost.

má maximum

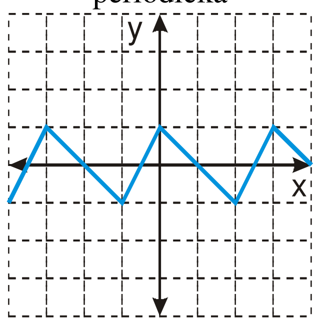


existuje největší hodnota

neklesající



periodická

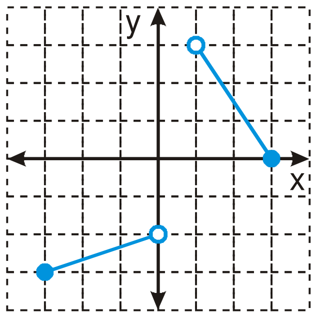


hodnoty se opakují

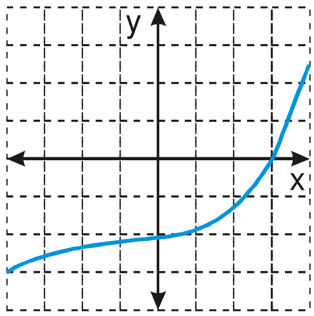
prostá

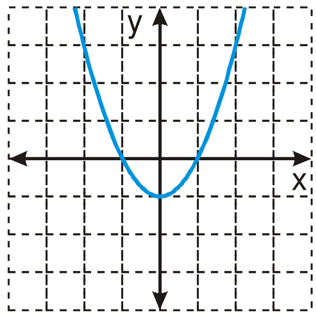
rostoucí

sudá



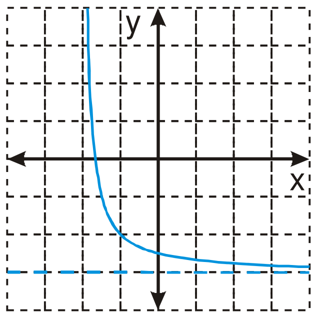
různá *x* mají různá *y*



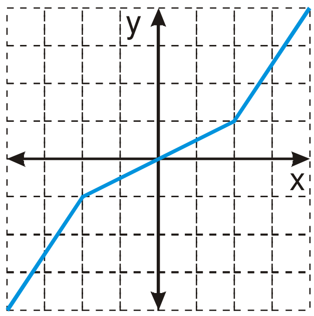


navzájem opačná čísla mají stejné hodnoty

zdola omezená bez minima

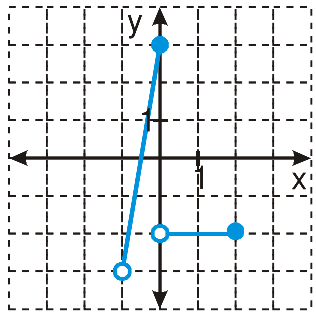


Lichá

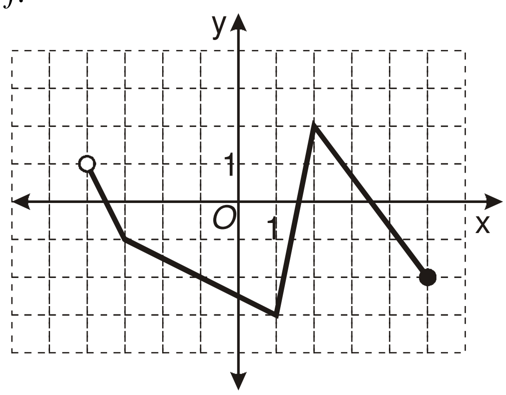


navzájem opačná čísla mají opačné hodnoty

$D(f) = (-1; 2\rangle$ $H(f) = \langle -3; 3)$



Př. 4: V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* je sestrojen graf funkce *f* s definičním oborem $(-4; 5\rangle$ (Vrcholy lomené čáry jsou v mřížových bodech). Zapiš obor hodnot funkce *f*. **1 bod**



Obor hodnot tvoří všechny hodnoty (osa *y*) funkce $\Rightarrow$ $H(f) = \langle -4; 3\rangle$.

Př. 5: V bodu *B* grafu funkce $f: y = -\frac{5}{6}x + \frac{1}{2}$ jsou souřadnice *x*, *y* navzájem opačné. Urči souřadnice bodu *B*. **1 bod**

Pokud mají být souřadnice *x*, *y* navzájem opačné, musí platit $y = -x$. Dosadíme do předpisu funkce: $-x = -\frac{5}{6}x + \frac{1}{2} \quad / + \frac{5}{6}x$

$-\frac{x}{6}=\frac{1}{2} \quad / \cdot(-6)$

$x=-3 \Rightarrow y=-x=-(-3)=3$

Souřadnice bodu *B* jsou $B[-3;3]$.

Př. 6: Jsou dány funkce *f*, *g* s definičními obory *R*. $f: y=-3x$, $g: y=-3-x$. Rozhodni o každém z následujících tvrzení, zda je pravdivé či nikoliv.

1. $f(-1)<g(-1)$
2. Funkce *f* je klesající.
3. Funkce *g* není omezená.
4. Grafy funkcí *f* a *g* se protínají ve společném bodě $P\left[\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right]$. **max. 2 body**

(2 za 4 správné odpovědi, 1 bod za 3 správné odpovědi, jinak bez bodu)

1. $f(-1)<g(-1)$

Spočteme hodnoty obou funkcí:

- $f(-1)=-3\cdot(-1)=3$
- $g(-1)=-3-(-1)=-2$

$\Rightarrow$ tvrzení $f(-1)<g(-1)$ je nepravdivé.

2. Funkce *f* je klesající.

$f: y=-3x$, funkce *f* má záporný koeficient *a* (tedy hodnoty *x* jsou násobeny záporným číslem $\Rightarrow$ i když hodnoty *x* rostou, hodnoty *y* se zmenšují) $\Rightarrow$ funkce *f* je klesající $\Rightarrow$ tvrzení „Funkce *f* je klesající) je pravdivé.

3. Funkce *g* není omezená.

$g: y=-3-x$: funkce *g* je lineární funkce, která není konstantní $\Rightarrow$ grafem je přímka, která není rovnoběžná s osou *x* $\Rightarrow$ grafem funkce je přímka $\Rightarrow$ funkce $g: y=-3-x$ není ani shora ani zdola omezená

4. Grafy funkcí *f* a *g* se protínají ve společném bodě $P\left[\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right]$.

Spočteme průsečík obou funkcí $\Rightarrow$ řešíme soustavu $\begin{matrix} y=-3x \\ y=-3-x \end{matrix}$. Z druhé rovnice dosadíme za *y* do první rovnice.

$-3-x=-3x \quad /+x$

$-3=-2x \quad /:(-2)$

$x=\frac{3}{2}\neq\frac{1}{2} \Rightarrow$ bod $P\left[\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right]$ není průsečíkem grafů funkcí *f* a *g* $\Rightarrow$ tvrzení je nepravdivé.

Celková odpověď: 1N, 2A, 3A, 4N.

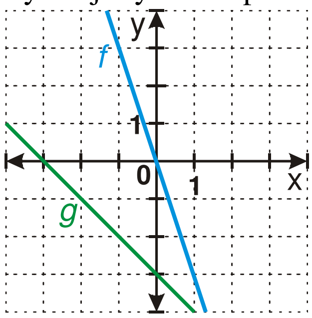
Dodatek: Bod 4. můžeme vyřešit také dosazením souřadnic bodu P do předpisů obou funkcí:

$y=-3x \Rightarrow -\frac{3}{2}=-3\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow$ bod P leží na grafu funkce f.

$y=-3-x \Rightarrow -\frac{3}{2}\neq-3-\frac{1}{2}=-\frac{6}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{7}{2} \Rightarrow$ bod P neleží na grafu funkce g.

bod $P\left[\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right]$ není společný body grafů funkcí f a g.

Dodatek: Rychleji vyřešíme předchozí příklad, když načrtneme grafy obou funkcí:



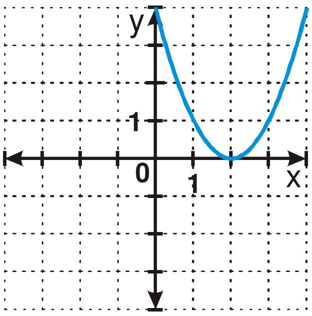
Podle obrázku můžeme ihned rozhodnout pravdivost jednotlivých tvrzení:

1. $f(-1)<g(-1)$: Nepravdivé (modrá čára je výše než zelená)
2. Funkce f je klesající: Pravdivé (modrá čára jde doprava dolů).
3. Funkce g není omezená: Pravdivé (grafem funkce g je přímka, která není vodorovná).
4. Grafy funkcí f a g se protínají ve společném bodě $P\left[\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right]$: Nepravdivé (z obrázku je zřejmé, že oba grafy se protnou pro $x>1$).

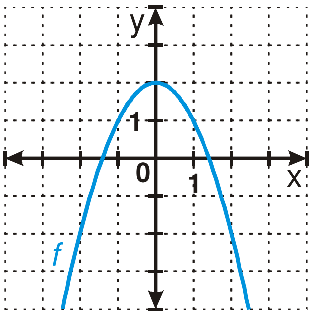
Př. 7: Ke každé z následujících funkcí (1. -4.) s definičním oborem R přiřaď z nabídky (A – H) její obor hodnot. **max. 4 body**

1. $y=(2-x)^2$	2. $y=2-x^2$	3. $y=2-x$	4. $y=2$
A) R	B) $R-\{2\}$	C) $(-\infty;0\rangle$	D) $(-\infty;2\rangle$
E) $\langle 0;\infty)$	F) $\langle 2;\infty)$	G) $\{2\}$	H) $\emptyset$

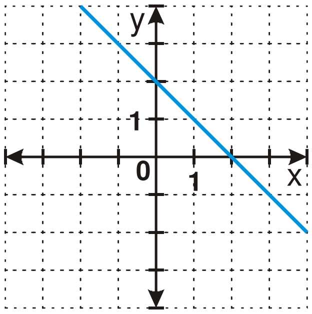
1. $y=(2-x)^2$: funkční hodnota funkce je druhá mocnina výrazu s proměnnou x, grafem je parabola s vrcholem v bodě $V[2;0] \Rightarrow$ oborem hodnot je interval $\langle 0;\infty)$ - možnost E).



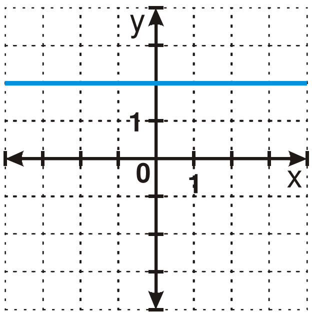
2. $y = 2 - x^2$: grafem funkce je převrácená parabola posunutá o 2 nahoru $\Rightarrow$ oborem hodnot je interval $\left(-\infty; 2\right\rangle$ - možnost D).



3. $y = 2 - x$: jde o klesající lineární funkci $\Rightarrow$ grafem funkce je přímka, která není rovnoběžná s osou x $\Rightarrow$ oborem hodnot je celá množina reálných čísel R - možnost A).



4. $y = 2$: jde o konstantní lineární funkci $\Rightarrow$ grafem funkce je přímka rovnoběžná s osou x procházející například bodem $[0; 2]$ $\Rightarrow$ oborem hodnot je pouze číslo 2 - možnost G).



Celkový výsledek: 1E, 2D, 3A, 4G

Dodatek: Pro správné řešení samozřejmě není nutné kreslit grafy, nebo naopak. Když nakreslíme grafy není třeba příliš argumentovat slovně.

Matematika plus

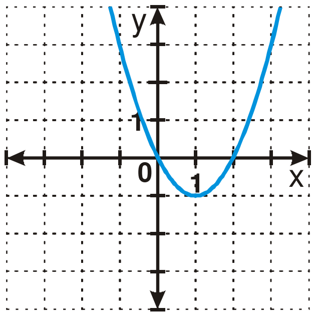
Př. 8: Která z následujících funkcí je v intervalu $\langle 0;\infty)$ rostoucí?

A) $f_1: y=(x-1)^2-1$ B) $f_2: y=1-(x-1)^2$ C) $f_3: y=(x+1)^2-1$

D) $f_4: y=1-(x+1)^2$ E) žádná z uvedených **2 body**

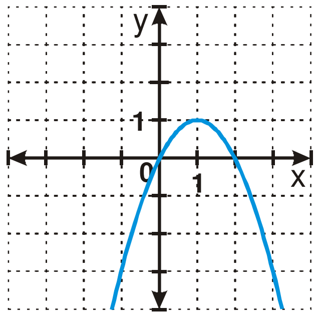
Nakreslíme si grafy jednotlivých funkcí.

$f_1: y=(x-1)^2-1$



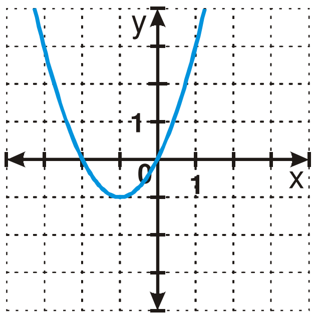
Funkce je rostoucí v intervalu $\langle 1;\infty)$.

$f_2: y=1-(x-1)^2$



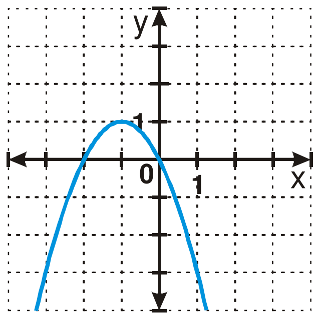
Funkce je rostoucí v intervalu $(-\infty;1\rangle$.

$f_3: y=(x+1)^2-1$



Funkce je rostoucí v intervalu $\langle -1;\infty)$ a tedy i v intervalu $\langle 0;\infty)$.

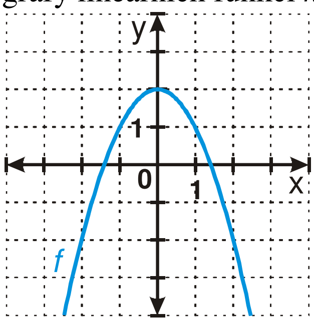
$f_4: y=1-(x+1)^2$

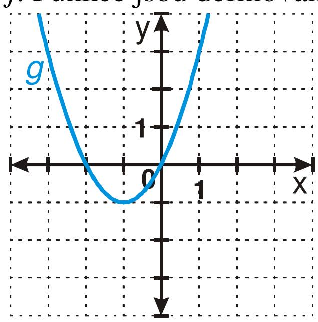


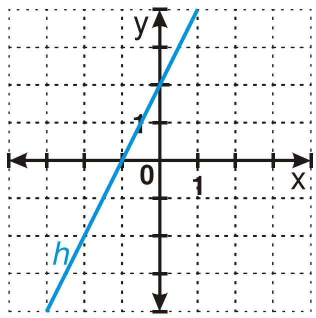
Funkce je rostoucí v intervalu $(-\infty;-1\rangle$.

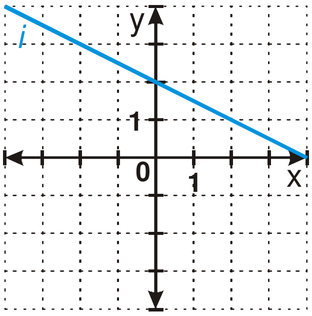
V intervalu $\langle 0;\infty)$ je rostoucí funkce C) $f_3: y=(x+1)^2-1$.

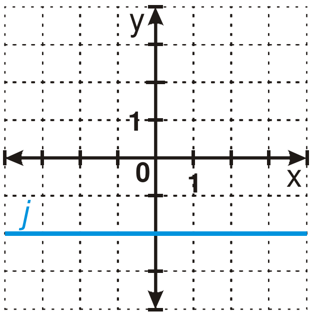
Př. 9: V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* jsou sestrojeny grafy kvadratických funkcí *f*, *g* a grafy lineárních funkcí *h*, *i*, *j*. Funkce jsou definovány pro všechna $x\in R$.











Který z následujících vztahů <u>není pravdivý</u> pro všechna $x \in R$?

A) $f(x)+g(x)=h(x)$ B) $2x \cdot i(x)=f(x)-j(x)$ C) $h(x)+4\cdot i(x)=-5\cdot j(x)$

D) $\frac{1}{2}h^2(x)=2\cdot g(x)-j(x)$ E) $i(x)=\frac{x}{j(x)}+2$ **2 body**

Najdeme si předpisy jednotlivých funkcí:

- $f(x)=-x^2+2$
- $g(x)=(x+1)^2-1=x^2+2x+1-1=x^2+2x$
- $h(x)=2x+2$
- $i(x)=2-\frac{1}{2}x$
- $j(x)=-2$

Nyní můžeme zkontrolovat pravdivost jednotlivých vztahů:

- A) $f(x)+g(x)=2-x^2+x^2+2x=2x+2=h(x)$ - vztah platí
- B) $2x\cdot i(x)=2x\left(2-\frac{1}{2}x\right)=4x-x^2$

  $f(x)-j(x)=-x^2+2-(-2)=4-x^2$

  Vztah neplatí.
- C) $h(x)+4\cdot i(x)=2x+2+4\cdot\left(2-\frac{1}{2}x\right)=2x+2+8-2x=10=-5\cdot(-2)=-5\cdot j(x)$ -

  Vztah platí.
- D) $\frac{1}{2}h^2(x)=\frac{1}{2}\cdot(2x+2)^2=\frac{1}{2}\cdot\left(4x^2+8x+4\right)=2x^2+4x+2$

  $2\cdot g(x)-j(x)=2\left(x^2+2x\right)-(-2)=2x^2+4x+2$

  Vztah platí.
- $\frac{x}{j(x)}+2=\frac{x}{-2}+2=-\frac{1}{2}x+2=i(x)$

  Vztah platí.

Správná odpověď B).

Shrnutí: